2/11/2018

Πρόταση: Να γραφεί το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ σαν ορίζουσα

$$D_n = \det\begin{pmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & & \alpha_1 & \alpha_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_0 = \det(\alpha_0)$$

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \alpha_1 x + \alpha_0$$

Με επαγωγή στο n Ισχύει για $n=0,1$

$$D_n = \alpha_n x^n - (-1) D_{n-1} \overset{\text{επαγωγή}}{=} \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Scanned by CamScanner

Πρόταση: Να δ.ο. αν $A_{m\times m}$, $B_{n\times n}$, $C_{n\times m}$, και $C'_{m\times n}$ τότε

$$\det\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}=\det A\cdot\det B$$

$$\det\begin{pmatrix}A & C'\\ 0 & B\end{pmatrix}=\det A\cdot\det B$$

Αποδ. με επαγωγή στο m

$m=1$

$$\det\begin{pmatrix}\cancel{\alpha_{11}} & \cancel{0}\\ \alpha_{21} & \\ \vdots & \boxed{B}\\ \alpha_{n+1\,1} & \end{pmatrix}=\alpha_{11}\det B$$

$m=2$

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & B\\ \alpha_{31} & & \end{pmatrix}=\alpha_{11}\det\begin{pmatrix}\alpha_{22} & 0\\ \vdots & B\end{pmatrix}-\alpha_{12}\det\begin{pmatrix}\alpha_{21} & 0\\ \vdots & B\end{pmatrix}$$

$$=\alpha_{11}\alpha_{22}\det B-\alpha_{12}\alpha_{21}\det B=(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\det B=\det A\cdot\det B$$

Υποθ για m και αποδ. με τον ίδιο τρόπο για το $m+1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν ο A αντιστρέφεται τότε ο A^{-1} δίνεται από

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j}\det A_{ij}\right)^t$$

Αποδ. $A\cdot A^{-1}=I$, $\sum_{t=1}^{n}\alpha_{it}\alpha'_{tj}$ με $\alpha'_{tj}=\frac{1}{\det A}(-1)^{t+j}\det(A_{jt})$

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} \frac{1}{\det A} (-1)^{t+j} \det A_{jt} = \begin{cases} \to 1 & i=j \\ \to 0 & i \neq j \end{cases}$$

Ο κανόνας του Cramer: Έστω το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ με A έναν αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα. Τότε $x = A^{-1}b$ με $x_i = \frac{\det(A^{(i)})}{\det(A)}$. Όπου $A^{(i)}$ είναι ο πίνακας A με αντικατ. της i στήλης με b στήλη.

Π.χ.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x+y+z &= 2 \\ y+2z &= 4 \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ rank $A=3 \Leftrightarrow A$ αντιστρέφεται.

rank $(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$ rank $A \Rightarrow$ το σύστημα έχει λύση

$$x_1 = \frac{\det(A^{(1)})}{\det A}, \quad x_2 = \frac{(\det A^{(2)})}{\det A}, \quad x_3 = \frac{(\det A^{(3)})}{\det A}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Αποδ: A αντιστρ. $\Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j}\det A_{ij}\right)^t$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$x = A^{-1}b \Rightarrow x_i = i$- γραμμή του A^{-1} με το b

$$x_i = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\det A}(-1)^{i+t}\det A_{ti}b_t = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}$$

Ορίζουσα Vadermorde

$$\cancel{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}} \quad V_n = \det\begin{pmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_1^0 & \dots & \alpha_n^0 \\ \alpha_0^1 & \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \quad (n+1)\times(n+1)$$

Αν $\alpha_0 = \alpha_1 \Rightarrow V_n = 0$ και αν $\alpha_i = \alpha_j \Rightarrow V_n = 0$ Άρα η V_n διαιρείται από τα $(\alpha_i - \alpha_j)$ για όλα τα $i \neq j$

$$V_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 - \alpha_0$$

Ορίζουμε την ορίζουσα $f(t) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \alpha_n^0 \\ t & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ t^2 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n & \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} =$

$f(\alpha_i) = 0$. Άρα το $f(t)$ διαιρείται από το $(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\dots$

$(t-a_n)$. Δηλαδή $f(t) = c(t-a_1)\dots(t-a_n)$ με c κάποιο πολυώνυμο.

βαθμός ως προς $t = n$.

Το $f(t)$ έχει βαθμό n ως προς t

Άρα το c είναι πολυώνυμο χωρίς το t μόνο με τα $a_1, \dots, a_n$,

Αρκεί να βρούμε τον συντελεστή του t^n στο $f(t)$

Αν αναπτύξουμε ως προς την $1^{η}$ στήλη

$$f(t) = 1 \cdot \det A_{11} - t \det A_{21} + t^2 \det A_{31} + \dots + (-1)^n t^n \det$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$c = (-1)^n \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Από την υπόθεση της:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_1)\dots (a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})\dots(a_n-a_1)$$

$$\prod_{i=2}^{n} \prod_{j<i} (a_i - a_j)$$

Δηλ. $f(t) = c \cdot (t-a_1)\dots(t-a_n) = (-1)^n \prod_{i=2}^{n} \prod_{j<i} (a_i-a_j)(t-a_1)\dots$

$\ldots (t-a_n)$ $\cancel{(-1)^n \prod_{i=2}^{n} \prod_{j<i} (a}$

Για $t=a_0$ έχουμε Vandermonde.

$$V_n = f(a_0) = (-1)^n \left(\prod_{i=2}^{n} \prod_{j<i} (a_i-a_j)\right)(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)$$

$$V_n = \left(\prod_{i=2}^{n} \prod_{1\le j<i} (a_i-a_j)\right)(a_1-a_0)(a_2-a_0)\ldots(a_n-a_0) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{0\le j<i} (a_i-a_j).$$